# 4º ESO – opción B – Ejercicios

# Ejercicios de Trigonometría

1) Indica la medida de estos ángulos en radianes:

   a) 0º
   b) 45º
   c) 60º
   d) 120º

   Resolución:

   Recuerda que 360º son 2π radianes, con lo que para hacer la conversión realizaremos una simple regla de tres:

   e) 0º son 0 rad
   f) 45º son 90π/360 = π/4 rad
   g) 60º son 120π/360 = π/3 rad
   h) 120º son 240π/360 = 2π/3 rad

2) Expresa en grados los siguientes ángulos:

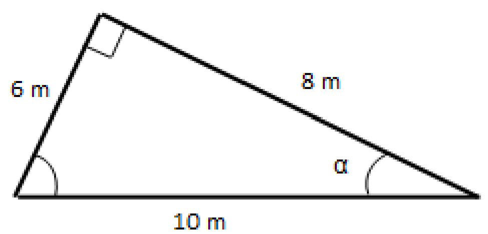
   a) π/6 rad
   b) 0,8 rad
   c) 3π/4 rad
   d) 3π rad

   Resolución:

   Recuerda que 360º son 2π radianes, con lo que para hacer la conversión realizaremos una simple regla de tres:

   e) π/6 rad son 30º
   f) 0,8 rad son 45,83º
   g) 3π/4 rad son 135º
   h) 3π rad son 540º = 180º

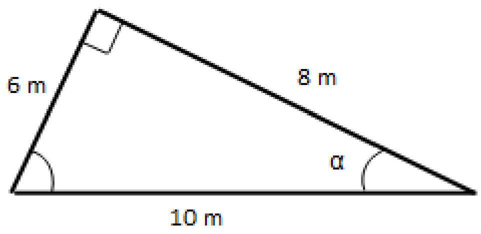
3) Calcula las razones trigonométricas del ángulo agudo de menor amplitud:



# 4º ESO – opción B – Ejercicios

Resolución:

Observamos que tenemos un triángulo rectángulo, con lo que podemos aplicar la definición del seno, del coseno y de la tangente para calcularlas pues tenemos todos los lados. El ángulo agudo de menor amplitud será el de la derecha de la figura así pues:




sen α será cateto opuesto partido por hipotenusa
cos α será cateto contiguo partido por hipotenusa
tg α será cateto opuesto partido por cateto contiguo

sen α = 6 /10 = 3 / 5 = 0,6
cos α = 8 / 10 = 4 / 5 = 0,8
tg α = 6 / 8 = 3 / 4 = 0,75

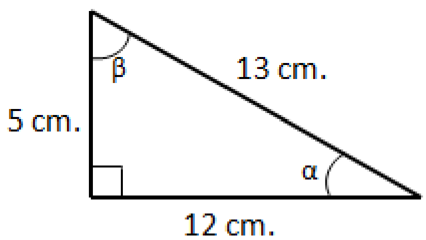
4) Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo sabiendo que la hipotenusa y uno de sus catetos miden 13 y 5 centímetros, respectivamente:

Resolución:

Lo primero y aplicando el teorema de Pitágoras obtendremos el cateto que nos falta:

$13^2 = 5^2 + c^2$ => $169 = 25 + c^2$ $c^2 = 144$ => $c = 12$

Una vez aquí tendremos 6 razones, 3 para cada ángulo del triángulo y tenemos todos los datos con que lo que calculamos:




sen α = 5 / 13
cos α = 12 / 13
tg α = 5 / 12

sen β = 12 / 13

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

$\cos \beta = 5 / 13$
$\text{tg } \beta = 12 / 5$

5) Calcula las restantes razones trigonométricas de un ángulo agudo sabiendo que:

**sen α = $\sqrt{3} / 5$**

Resolución:

Para calcular las restantes razones trigonométricas aplicaremos las fórmulas de relaciones entre ellas. Como nos dan el seno, podemos obtener el coseno de la siguiente forma:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow (\sqrt{3} / 5)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - (3 / 25)$

$\cos^2 \alpha = 22 / 25 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{22} / 5$ (tomamos el valor positivo al ser un ángulo agudo)

Una vez aquí y al tener el seno y el coseno aplicamos la definición de la tangente para obtenerla:

$\text{tg } \alpha = \text{sen } \alpha / \cos \alpha \Rightarrow \text{tg } \alpha = (\sqrt{3} / 5) / (\sqrt{22} / 5)$

$\text{tg } \alpha = \sqrt{3} / \sqrt{22}$ que racionalizando quedará $\text{tg } \alpha = \sqrt{66} / 22$

6) Calcula las restantes razones trigonométricas de un ángulo agudo sabiendo que:

**cos α = 1 / 5**

Resolución:

Para calcular las restantes razones trigonométricas aplicaremos las fórmulas de relaciones entre ellas. Como nos dan el coseno, podemos obtener el seno de la siguiente forma:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + (1 / 3)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha = 1 - (1 / 9)$

$\text{sen}^2 \alpha = 8 / 9 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \sqrt{8} / 3$ (tomamos el valor positivo al ser un ángulo agudo)

Una vez aquí y al tener el seno y el coseno aplicamos la definición de la tangente para obtenerla:

$\text{tg } \alpha = \text{sen } \alpha / \cos \alpha \Rightarrow \text{tg } \alpha = (\sqrt{8} / 3) / (1 / 3) \Rightarrow \text{tg } \alpha = \sqrt{8}$

7) La tangente de un ángulo agudo α es igual a 4 / 3. Halla el seno y el coseno:

**tg α = 4 / 3**

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

Resolución:

Para calcular las restantes razones trigonométricas aplicaremos las fórmulas de relaciones entre ellas. Como nos dan la tangente, podemos obtener el coseno de la siguiente forma:

$tg^2\ \alpha + 1 = 1 / \cos^2 \alpha$ => $(4 / 3)^2 + 1 = 1 / \cos^2 \alpha$ => $(16 / 9) + 1 = 1 / \cos^2 \alpha$

$(25 / 9) = 1 / \cos^2 \alpha$ => despejando el coseno

$25\cos^2 \alpha = 9$ => $\cos^2 \alpha = 9 / 25$ => $\cos \alpha = 3 / 5$ (al ser un ángulo agudo tomamos la raíz positiva)

Una vez aquí y al tener el coseno podemos aplicar la fórmula que lo relaciona con el seno:

$sen^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ => $sen^2\ \alpha + (3 / 5)^2 = 1$ => $sen^2\ \alpha = 1 - (9 / 25)$

$sen^2\ \alpha = 16 / 25$ => $sen\ \alpha = 4 / 5$ (tomamos la raíz positiva al ser un ángulo agudo)

8) Simplifica la siguiente expresión:

$\mathbf{(sen^2\ \alpha + \cos^2 \alpha) + (sen^2\ \alpha - \cos^2 \alpha)}$

Resolución:

Aplicamos las relaciones entre las razones trigonométricas:

Sabemos que,

$sen^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

y que

$\cos^2 \alpha = 1 - sen^2\ \alpha$

Así pues y sustituyendo,

$(sen^2\ \alpha + \cos^2 \alpha) + (sen^2\ \alpha - \cos^2 \alpha) = (1) + (sen^2\ \alpha - (1 - sen^2\ \alpha)) =$
$1 + (sen^2\ \alpha - 1 + sen^2\ \alpha)) = 1 + sen^2\ \alpha - 1 + sen^2\ \alpha = 2sen^2\ \alpha$

9) La tangente de un ángulo del tercer cuadrante es $tg\ \alpha = 4$. Halla las otras dos razones trigonométricas de este ángulo:

Resolución:

Para calcular las restantes razones trigonométricas aplicaremos las fórmulas de relaciones entre ellas. Como nos dan la tangente, podemos obtener el coseno de la siguiente forma:

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

$tg^2\ \alpha + 1 = 1 / \cos^2 \alpha$ => $(4)^2 + 1 = 1 / \cos^2 \alpha$ => $16 + 1 = 1 / \cos^2 \alpha$

$17 = 1 / \cos^2 \alpha$ => despejando el coseno

$17\cos^2 \alpha = 1$ => $\cos^2 \alpha = 1 / 17$ => $\cos \alpha = -(\sqrt{1} / \sqrt{17})$ (al ser un ángulo del tercer cuadrante tomamos la raíz negativa pues el coseno en ese cuadrante es negativo)

Racionalizando $\cos \alpha = -(\sqrt{17} / 17)$

Una vez aquí y al tener el coseno podemos aplicar la fórmula que lo relaciona con el seno:

$sen^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ => $sen^2\ \alpha + (-(\sqrt{17} / 17))^2 = 1$ => $sen^2\ \alpha = 1 - (17 / 289)$

$sen^2\ \alpha = 272 / 289$ => $sen\ \alpha = -(\sqrt{272} / 17)$ (al ser un ángulo del tercer cuadrante tomamos la raíz negativa pues el seno en ese cuadrante es negativo)

10) Con la ayuda de la calculadora, halla el seno, el coseno y la tangente de estos ángulos:

a) 275º
b) 124º 16'
c) 1,5 rad
d) $2\,\pi / 5$

Resolución:

Para hallar las razones trigonométricas con la calculadora lo primero que tenemos que mirar es en que unidades la tenemos. Si nos dan los ángulos en radianes, el símbolo que debe aparecer en la parte superior de la calculadora es R; si nos lo dan en grados deberá aparecer D. Con estas consideraciones:

a) sen 275º = –0,99619469 (calculadora con D en la parte superior)
cos 275º = 0,08715574 (calculadora con D en la parte superior)
tg 275º = –11,4300523 (calculadora con D en la parte superior)

b) sen 124º 16' = sen 124,26666666667º = 0,826426 (calculadora con D en la parte superior y primero pasamos de sistema sexagesimal a sistema decimal)
cos 124º 16' = cos 124,26666666667º = –0,56304534 (calculadora con D en la parte superior y primero pasamos de sistema sexagesimal a sistema decimal)
tg 275º = 124º 16' = tg 124,26666666667º = –1,46777875 (calculadora con D en la parte superior y primero pasamos de sistema sexagesimal a sistema decimal)

c) sen 1,5 rad = 0,99749498 (calculadora con R en la parte superior)
cos 1,5 rad = 0,0707372016 (calculadora con R en la parte superior)
tg 1,5 rad = 14,10141994 (calculadora con R en la parte superior)

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

d) sen 2π / 5 rad = sen 1,25663706144 = 0,95105351 (calculadora con R en la parte superior, y operando con el valor de π )
cos 2π / 5 rad = cos 1,25663706144 = 0,30901699 (calculadora con R en la parte superior, y operando con el valor de π )
tg 2π / 5 rad = tg 1,25663706144 = 3,077683537 (calculadora con R en la parte superior, y operando con el valor de π )

11) Resuelve estas ecuaciones trigonométricas:

a) tg x = –1
b) cos x = √2 / 2
c) sen x = 0
d) cos x = –0,7561

Resolución:

En este caso hay que dejar la razón trigonométrica a un lado y los números al otro. Para este ejercicio ya nos lo dan así. Aquí lo que nos piden es el ángulo, no el valor de la razón trigonométrica. Como no nos dicen nada, calculadora en D. Para obtenerlo procederemos así:

a) tg x = –1 , daremos al botón INV y luego a la tangente (ó a $tg^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuya tangente vale –1
x = –45º ó x = 315º ( es muy común que las calculadoras nos den los ángulos en negativo, intentaremos es este caso pasarlo a positivo)
Recuerda, tangente negativa en 2 y 4 cuadrantes, así pues las soluciones serán:
x = 315º + 360º k, k ϵ Z
x = 135º + 360º k, k ϵ Z

b) cos x = √2 / 2 , daremos al botón INV y luego al coseno (ó a $cos^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuyo coseno vale √2 / 2
x = 45º
Recuerda, coseno positivo en 1 y 4 cuadrantes, así pues las soluciones serán:
x = 45º + 360º k, k ϵ Z
x = 315º + 360º k, k ϵ Z

c) sen x = 0 , daremos al botón INV y luego al seno (ó a $sen^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuyo seno vale 0
x = 0º
Recuerda, seno positivo en 1 y 2 cuadrantes, así pues las soluciones serán:
x = 0º + 360º k, k ϵ Z
x = 180º + 360º k, k ϵ Z

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

d) cos x = –0,7561 , daremos al botón INV y luego al coseno (ó a $\cos^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuyo coseno vale –0,7561
x = 90º
Recuerda, coseno negativo en 2 y 3 cuadrantes, así pues las soluciones serán:
x = 139,1215º + 360º k, k ϵ Z
x = 220,8784º + 360º k, k ϵ Z

12) Indica la medida en el sistema sexagesimal de los siguientes ángulos expresados en radianes:

a) 5π rad
b) 5π/6 rad
c) 7π/4 rad
d) π/8 rad
e) 4π/3 rad
f) 7π/11 rad

Resolución:

Para pasar radianes a grados aplicaremos una simple regla de tres teniendo en cuenta que 2π rad son 360º . A su vez recordamos que 1º son 60' y que 1' son 60''.

a) 5π rad , aplicando la regla de tres nos quedan 900º
b) 5π/6 rad , aplicando la regla de tres nos quedan 150º
c) 7π/4 rad , aplicando la regla de tres nos quedan 315º
d) π/8 rad , aplicando la regla de tres nos quedan 22,5º que son 22º 30'
e) 4π/3 rad , aplicando la regla de tres nos quedan 240º
f) 7π/11 rad , aplicando la regla de tres nos quedan 114,5454º que son 114º 32' 43''

13) Halla el ángulo del intervalo [0º , 360º] que corresponda a:

a) 450º
b) 720º
c) 1300º
d) 1800º
e) 540º
f) 900º

Resolución:

Para llevar ángulos positivos a ese intervalo tendremos que restar 360º o múltiplos de éste hasta que el ángulo este comprendido entre [0º , 360º]. Así pues:

a) 450º , quitamos 360º => 450º - 360º = 90º ángulo que ya está entre 0º y 360º
b) 720º , quitamos 360º*2 => 720º - 360º*2 = 0º ángulo que ya está entre 0º y 360º
c) 1300º , quitamos 360º*3 => 1300º - 360º*3 = 220º ángulo que ya está entre 0º y 360º
d) 1800º , quitamos 360º*4 => 1800º - 360º*4 = 360º ángulo que ya está entre 0º y 360º

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

e) 540º , quitamos 360º => 540º - 360º = 180º ángulo que ya está entre 0º y 360º
f) 900º , quitamos 360º*2 => 900º - 360º*2 = 180º ángulo que ya está entre 0º y 360º

14) Calcula el ángulo equivalente en sentido positivo a cada uno de los siguientes ángulos. Utiliza en cada caso la misma unidad de medida en que viene dados:

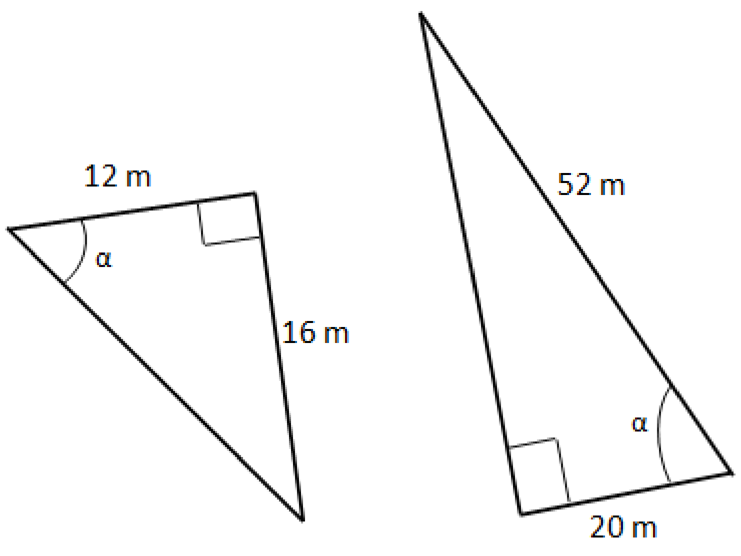
a) –330º
b) –3π/4 rad
c) –120º
d) –π/2 rad

Resolución:

Para calcular el de equivalente en sentido positivo tendremos que sumar 360º o 2π rad. Así pues:

a) –330º , sumamos 360º => –330º + 360º = 30º
b) –3π/4 rad , sumamos 2π rad => –3π/4 + 2π = 5π/4 rad
c) –120º , sumamos 360º => –120º + 360º = 240º
d) –π/2 rad , sumamos 2π rad => –π/2 + 2π = 3π/2 rad

15) Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada triángulo rectángulo:



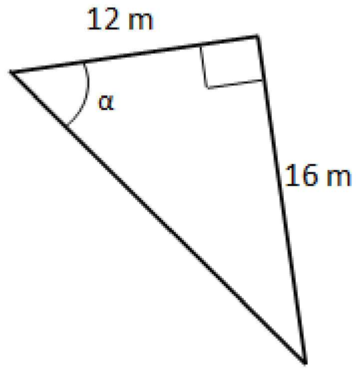

Resolución:

a) Lo primero y aplicando el teorema de Pitágoras obtendremos el cateto que nos falta:

$h^2 = 12^2 + 16^2$ = > $h^2 = 12^2 + 16^2$ $h^2 = 400$ => $h = 20$

Una vez aquí tendremos las 3 razones trigonométricas:

# 4º ESO – opción B – Ejercicios



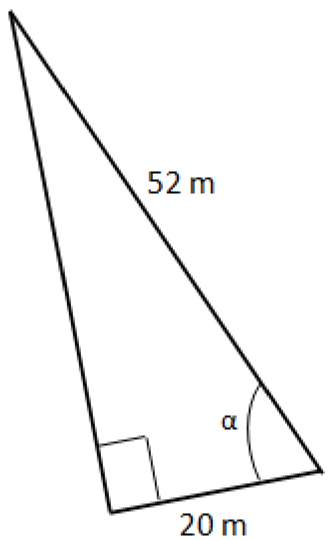

sen α = 16 / 20 = 4 / 5 = 0,8
cos α = 12 / 20 = 3 / 5 = 0.6
tg α = 16 / 12 = 4 / 3 = 1,33333333

Adicionalmente el ángulo α vale, usando por ejemplo el seno, arc sen α = 4 / 5, α = 53,1301º (con la calculadora en D)

b) Lo primero y aplicando el teorema de Pitágoras obtendremos el cateto que nos falta:

$52^2 = 20^2 + c^2 \Rightarrow 2704 = 400 + c^2 \quad c^2 = 2304 \Rightarrow c = 48$

Una vez aquí tendremos las 3 razones trigonométricas:

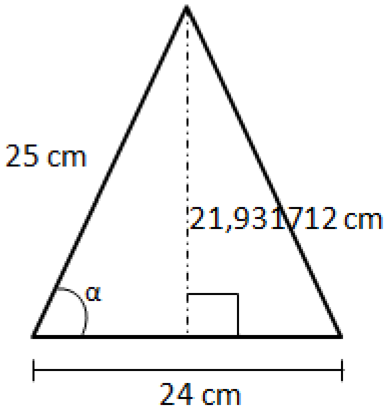



sen α = 48 / 52 = 12 / 13 = 0,92307692
cos α = 20 / 52 = 5 / 13 = 0,38461538
tg α = 16 / 12 = 12 / 5 = 2,4

Adicionalmente el ángulo α vale, usando por ejemplo el seno, arc sen α = 12 / 13,
α = 67,3801º (con la calculadora en D)

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

16) Calcula las razones trigonométricas del ángulo α:

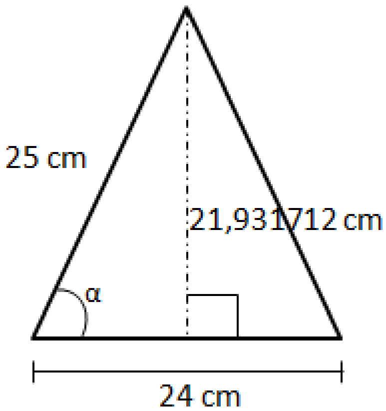



Resolución:

Lo primero que observamos es que se trata de un triángulo isósceles, y al trazar la altura nos ha quedado dividido en dos triángulos rectángulos. Si somos capaces de obtener el valor de los dos catetos podremos calcularlas.
El primero de los catetos, al ser un triángulo isósceles, será la mitad de la base, así pues su valor será 12 cm.
El segundo lo obtendremos aplicando el teorema de Pitágoras:

$25^2 = 12^2 + c^2 => 625 = 144 + c^2 \quad c^2 = 481 \; => \; c = 21{,}931712$

Una vez aquí tendremos las 3 razones trigonométricas:




cos α = 12 / 25 = 0,48
sen α = 21,931712 / 25 = 0,87726848
tg α = 21,931712 / 12 = 1,82764266

Adicionalmente el ángulo α vale, usando por ejemplo el seno, arc sen α = 12 / 25,
α = 61,31459798º (con la calculadora en D)

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

17) Halla la medida en el sistema sexagesimal de los ángulos del primer cuadrante que cumplen cada una de las siguientes condiciones:
a) sen $\alpha = 1 / 5$
b) tg $\beta = 4$
c) cos $\chi = 5 / 9$
d) sen $\delta = 0{,}4$

Resolución:

En este caso hay que dejar la razón trigonométrica a un lado y los números al otro. Para este ejercicio ya nos lo dan así. Aquí lo que nos piden es el ángulo, no el valor de la razón trigonométrica. Como nos piden los ángulos en sistema sexagesimal primero en D, posteriormente transformaremos. Para obtenerlo procederemos así:

a) sen $\alpha = 1 / 5$ , daremos al botón INV y luego al sen (ó a $\text{sen}^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuyo seno vale 1 / 5
$x = 11{,}53695903º$
Nos piden ángulo del primer cuadrante con lo que la solución es la anterior. Tan solo nos falta pasarlo a sistema sexagesimal. Damos al botón de º ‘ ‘’ y:
$x = 11º\ 32’\ 13’’$

b) tg $\beta = 4$, daremos al botón INV y luego a la tangente (ó a $\text{tg}^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuya tangente vale 4
$x = 75{,}96375653º$
Nos piden ángulo del primer cuadrante con lo que la solución es la anterior. Tan solo nos falta pasarlo a sistema sexagesimal. Damos al botón de º ‘ ‘’ y:
$x = 75º\ 57’\ 49’’$

c) cos $\chi = 5 / 9$ , daremos al botón INV y luego al cos (ó a $\cos^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuyo coseno vale 5 / 9
$x = 56{,}25101140º$
Nos piden ángulo del primer cuadrante con lo que la solución es la anterior. Tan solo nos falta pasarlo a sistema sexagesimal. Damos al botón de º ‘ ‘’ y:
$x = 56º\ 15’\ 03’’$

d) sen $\delta = 0{,}4$ , daremos al botón INV y luego al sen (ó a $\text{sen}^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuyo seno vale 0,4
$x = 23{,}57817847º$
Nos piden ángulo del primer cuadrante con lo que la solución es la anterior. Tan solo nos falta pasarlo a sistema sexagesimal. Damos al botón de º ‘ ‘’ y:
$x = 23º\ 34’\ 41’’$

18) Sin calcular su valor, indica el signo que tienen las siguientes razones trigonométricas:

a) cos 315º
b) sen 150º
c) tg 190º
d) sen 850º

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

e) tg 118º
f) cos 230º
g) sen 340º
h) cos 460º

Resolución:

Lo primero que debemos hacer es saber a qué cuadrante pertenece cada ángulo y a partir de ahí obtendremos el signo:

i) cos 315º, 315º está en el cuarto cuadrante con lo que el coseno será positivo
j) sen 150º, 150º está en el segundo cuadrante con lo que el seno será positivo
k) tg 190º, 190º está en el tercer cuadrante con lo que la tangente será positivo
l) sen 850º, 850º = 130º + 2 * 360º con lo que está en el segundo cuadrante con lo que el seno será positivo
m) tg 118º, 118º está en el segundo cuadrante con lo que la tangente será negativa
n) cos 230º, 230º está en el tercer cuadrante con lo que el coseno será negativo
o) sen 340º, 340º está en el cuarto cuadrante con lo que el seno será negativo
p) cos 460º, 460º = 100º + 360º está en el segundo cuadrante con lo que el coseno será negativo

19) Halla las otras dos razones trigonométricas del ángulo α en cada caso:

**a) Si cos α = 6 / 7 y 270º ≤ α ≤ 360º**

Resolución:

Para calcular las restantes razones trigonométricas aplicaremos las fórmulas de relaciones entre ellas. Como nos dan el coseno, podemos obtener el seno de la siguiente forma:

$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha + (6 / 7)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha = 1 - (36 / 49)$

$\text{sen}^2\ \alpha = 13 / 49 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = -(\sqrt{13} / 7)$ (tomamos el valor negativo pues nos dicen que ángulo está en el cuarto cuadrante)

Una vez aquí y al tener el seno y el coseno aplicamos la definición de la tangente para obtenerla:

$\text{tg}\ \alpha = \text{sen}\ \alpha / \cos \alpha \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = -(\sqrt{13} / 7) / (6 / 7) \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = -(\sqrt{13} / 6)$

**b) Si sen α = 3 / 8 y 90º ≤ α ≤ 180º**

Resolución:

Para calcular las restantes razones trigonométricas aplicaremos las fórmulas de relaciones entre ellas. Como nos dan el seno, podemos obtener el coseno de la siguiente forma:

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow (3/8)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - (9/64)$

$\cos^2 \alpha = 55/64 \Rightarrow \cos \alpha = -(\sqrt{55}/8)$ (tomamos el valor negativo pues nos dicen que ángulo está en el segundo cuadrante)

Una vez aquí y al tener el seno y el coseno aplicamos la definición de la tangente para obtenerla:

$\text{tg}\ \alpha = \text{sen}\ \alpha / \cos \alpha \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = (3/8) / -(\sqrt{55}/8) \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = 3 / -\sqrt{55}$

Una vez aquí racionalizamos,

$\text{tg}\ \alpha = -(\sqrt{165}/55)$

**c) Si tg α = √2 y 180º ≤ α ≤ 270º**

Resolución:

Para calcular las restantes razones trigonométricas aplicaremos las fórmulas de relaciones entre ellas. Como nos dan la tangente, podemos obtener el coseno de la siguiente forma:

$\text{tg}^2\ \alpha + 1 = 1/\cos^2 \alpha \Rightarrow (\sqrt{2})^2 + 1 = 1/\cos^2 \alpha \Rightarrow 2 + 1 = 1/\cos^2 \alpha$

$3 = 1/\cos^2 \alpha \Rightarrow$ despejando el coseno

$3\cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1/3 \Rightarrow \cos \alpha = -(1/\sqrt{3})$ (al ser un ángulo del tercer cuadrante tomamos el valor negativo), además racionalizamos

$\cos \alpha = -(\sqrt{3}/3)$

Una vez aquí y al tener el coseno podemos aplicar la fórmula que lo relaciona con el seno:

$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha + (\sqrt{3}/3)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\ \alpha = 1 - (3/9)$

$\text{sen}^2\ \alpha = 6/9 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = -(\sqrt{6}/3)$ (tomamos la raíz negativa al ser un ángulo del tercer cuadrante)

20) El coseno de un ángulo del primer cuadrante vale 12 / 13. Calcula:

**a) sen (α + 180º)**

Resolución:

Lo primero que debemos hacer es calcular las otras dos razones trigonométricas del ángulo α para tenerlas preparadas. Para calcular las restantes razones trigonométricas aplicaremos las fórmulas de relaciones entre ellas. Como nos dan el coseno, podemos obtener el seno de la siguiente forma:

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow sen^2\ \alpha + (12 / 13)^2 = 1 \Rightarrow sen^2\ \alpha = 1 - (144 / 169)$

$sen^2\ \alpha = 25 / 169 \Rightarrow sen\ \alpha = 5 / 13$ (tomamos el valor positivo pues el ángulo es del primer cuadrante)

Una vez aquí y al tener el seno y el coseno aplicamos la definición de la tangente para obtenerla:

$tg\ \alpha = sen\ \alpha / cos\ \alpha \Rightarrow tg\ \alpha = (5 / 13) / (12 / 13) \Rightarrow tg\ \alpha = 5 / 12$

Una vez aquí para el primer caso, nos están pidiendo el seno del ángulo que difiere en 180º con lo que:

$sen\ (\alpha + 180º) = - sen\ \alpha \Rightarrow sen\ (\alpha + 180º) = -(5 / 13)$

**b) tg (90º – α)**

<u>Resolución:</u>

Nos están pidiendo la tangente de un ángulo complementario con lo que:

$tg\ (90º - \alpha) = 1 / tg\ \alpha \Rightarrow tg\ (90º - \alpha) = 1 / (5 / 12) = 12 / 5$

**c) cos (180º – α)**

<u>Resolución:</u>

Nos están pidiendo el coseno de un ángulo suplementario con lo que:

$cos\ (180º - \alpha) = - cos\ \alpha \Rightarrow cos\ (180º - \alpha) = - 12 / 13$

**d) sen (– α)**

<u>Resolución:</u>

Nos están pidiendo el seno de un ángulo opuesto con lo que:

$sen\ (-\alpha) = - sen\ \alpha \Rightarrow sen\ (-\alpha) = -(5 / 13)$

21) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas. Expresa el resultado el grados:

a) $cos\ \alpha = -(\sqrt{3} / 2)$
b) $1 - 2cos\ x = 0$
c) $sen\ \alpha = -(\sqrt{3} / 2)$
d) $tg\ \alpha = 1$

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

Resolución:

En este caso hay que dejar la razón trigonométrica a un lado y los números al otro.

a) Para este apartado ya nos lo dan así. Aquí lo que nos piden es el ángulo, no el valor de la razón trigonométrica. Como nos piden los ángulos en grados primero en D. Para obtenerlo procederemos así:

   cos α = – (√3 / 2), calcularemos el valor numérico y daremos al botón INV y luego al cos (ó a $\cos^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuyo coseno vale – (√3 / 2)
   x = 150º + 360º k, k ϵ Z
   x = 210º + 360º k, k ϵ Z (la otra solución es del tercer cuadrante, opuestos, con lo que la hemos calculado restando a 360º los 150º del primero)

b) Para este apartado no nos lo dan así, así pues lo primero es despejar. Como nos piden los ángulos en grados primero en D. Para obtenerlo procederemos así:

   1 – 2cos x = 0 => 2cos x = – 1 => cos x = – 1 / – 2

   cos α = 1 / 2, calcularemos el valor numérico y daremos al botón INV y luego al cos (ó a $\cos^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuyo coseno vale (1 / 2)
   x = 60º + 360º k, k ϵ Z
   x = 300º + 360º k, k ϵ Z (la otra solución es del cuarto cuadrante, son ángulos suplementarios, con lo que la hemos calculado sumando restando a 360º los 60º del ángulo)

c) Para este apartado ya nos lo dan así. Aquí lo que nos piden es el ángulo, no el valor de la razón trigonométrica. Como nos piden los ángulos en grados primero en D. Para obtenerlo procederemos así:

   sen α = – (√3 / 2), calcularemos el valor numérico y daremos al botón INV y luego al sen (ó a $\text{sen}^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuyo seno vale – (√3 / 2)
   x = – 60º = 300º + 360º k, k ϵ Z
   x = 240º + 360º k, k ϵ Z (la otra solución es del tercer cuadrante con lo que la hemos calculado restado 60º)

d) Para este apartado ya nos lo dan así. Aquí lo que nos piden es el ángulo, no el valor de la razón trigonométrica. Como nos piden los ángulos en grados primero en D. Para obtenerlo procederemos así:

   tg α = 1, calcularemos el valor numérico y daremos al botón INV y luego al tg (ó a $\text{tg}^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuya tangente vale 1
   x = 45º + 360º k, k ϵ Z

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

x = 225º + 360º k, k ϵ Z (la otra solución es del tercer cuadrante con lo que la hemos calculado sumando 180º)

22) Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas. Expresa el resultado el radianes:

a) tg α = – 2
b) 2 – 5 cos x = 6
c) sen x = 0,81
d) 4 sen x + 1 = 0

Resolución:

En este caso hay que dejar la razón trigonométrica a un lado y los números al otro.

a) Para este apartado ya nos lo dan así. Aquí lo que nos piden es el ángulo, no el valor de la razón trigonométrica. Como nos piden los ángulos en radianes primero en R. Para obtenerlo procederemos así:

tg α = – 2, calcularemos el valor numérico y daremos al botón INV y luego al tg (ó a $tg^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuya tangente vale – 2
x = – 1,1071487178 = 5,17603658938 + 2πk, k ϵ Z
x = 2,03444393579 + 2π k, k ϵ Z (la otra solución es del segundo cuadrante, difieren en π radianes, con lo que la hemos calculado restando π radianes)

b) Para este apartado no nos lo dan así con lo que primero despejaremos. Aquí lo que nos piden es el ángulo, no el valor de la razón trigonométrica. Como nos piden los ángulos en radianes primero en R. Para obtenerlo procederemos así:

2 – 5 cos x = 6 => – 5 cos x = 6 – 2 => – 5 cos x = 4 => cos x = – (4 / 5)

cos x = – (4 / 5), calcularemos el valor numérico y daremos al botón INV y luego al cos (ó a $cos^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuyo coseno vale – (4 / 5)
x = 2,49809154479 + 2πk, k ϵ Z
x = 3,78509376239 + 2π k, k ϵ Z (la otra solución es del tercer cuadrante, son opuestos, con lo que la hemos calculado restando a 2π radianes el primer ángulo)

c) Para este apartado ya nos lo dan despejaremos. Aquí lo que nos piden es el ángulo, no el valor de la razón trigonométrica. Como nos piden los ángulos en radianes primero en R. Para obtenerlo procederemos así:

sen x = 0,81 , calcularemos el valor numérico y daremos al botón INV y luego al sen (ó a $sen^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuyo seno vale 0,81
x = 0,944152115154 + 2πk, k ϵ Z

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

x = 2,19744053844 + 2π k, k ϵ Z (la otra solución es del segundo cuadrante, son ángulos complementarios, con lo que la hemos calculado restando a π radianes el primer ángulo)

d) Para este apartado no nos lo dan así con lo que primero despejaremos. Aquí lo que nos piden es el ángulo, no el valor de la razón trigonométrica. Como nos piden los ángulos en radianes primero en R. Para obtenerlo procederemos así:

4 sen x + 1 = 0 => 4 sen x = – 1 => cos x = – 1 / 4 => cos x = – (1 / 4)

sen x = – (1 / 5), calcularemos el valor numérico y daremos al botón INV y luego al sen (ó a $sen^{-1}$, dependiendo de las calculadoras), es decir, lo que estamos obteniendo es el arco cuyo seno vale – (1 / 4)
x = – 0,20135792079 = 6,08182738639 + 2πk, k ϵ Z
x = 3,34295057438 + 2π k, k ϵ Z (la otra solución es del tercer cuadrante, son opuestos, con lo que la hemos calculado restando a 2π radianes el primer ángulo y luego sumar π)

23) Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas:

**a) $tg^2\ \alpha * (1 – sen^2\ \alpha) = sen^2\ \alpha$**

Resolución:

Para calcular las restantes razones trigonométricas aplicaremos las fórmulas de relaciones entre ellas.

Si nos fijamos y como $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow cos^2\ \alpha = 1 – sen^2\ \alpha$

Así pues,

$tg^2\ \alpha * cos^2\ \alpha = sen^2\ \alpha$ , ahora tg α = sen α / cos α, con lo que sustituyendo

$(sen\ \alpha / cos\ \alpha)^2\ \alpha * cos^2\ \alpha = sen^2\ \alpha \Rightarrow (sen^2\ \alpha / cos\ \alpha^2\ \alpha) * cos^2\ \alpha = sen^2\ \alpha$

Si vemos, en la parte de la izquierda de la igualdad estamos multiplicando y dividiendo por $cos^2\ \alpha$, por lo que simplificando,

$sen^2\ \alpha = sen^2\ \alpha$, con lo que la igualdad es correcta.(salvo en aquellos casos que hagan que el coseno sea cero y la tangente infinito, éstos serán 90º y 270º más vueltas enteras)

**b) $(sen\ \alpha * cos\ \alpha) / tg\ \alpha = 1 – sen^2\ \alpha$**

Resolución:

Para calcular las restantes razones trigonométricas aplicaremos las fórmulas de relaciones entre ellas.

Si nos fijamos y como $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow cos^2\ \alpha = 1 – sen^2\ \alpha$

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

Así pues,

$(\text{sen } \alpha * \cos \alpha) / \text{tg } \alpha = \cos^2 \alpha$

Ahora podemos ver que el cos α está multiplicando en la parte izquierda de la igualdad con lo que puede pasar dividiendo al otro lado, así tendremos,

$\text{sen } \alpha / \text{tg } \alpha = \cos^2 \alpha / \cos \alpha$ => simplificando $\text{sen } \alpha / \text{tg } \alpha = \cos \alpha$

Ahora, la $\text{tg } \alpha = \text{sen } \alpha / \cos \alpha$, que sustituyendo

$\text{sen } \alpha / (\text{sen } \alpha / \cos \alpha) = \cos \alpha$, operando tenemos que

$(\text{sen } \alpha * \cos \alpha) / \text{sen } \alpha = \cos \alpha$, y finalmente simplificando el sen α que está multiplicando y dividiendo tenemos,

$\cos \alpha = \cos \alpha$, con lo que la igualdad queda demostrada (salvo en aquellos casos que hagan que el coseno sea cero y la tangente infinito, éstos serán 90º y 270º más vueltas enteras)

**c) $( 1 + \text{tg}^2 \alpha) * \cos^2 \alpha = 1$**

Resolución:

Para calcular las restantes razones trigonométricas aplicaremos las fórmulas de relaciones entre ellas.

Si nos fijamos y como $1 + \text{tg}^2 \alpha = 1 /\cos^2 \alpha$,

Así pues sustituyendo,

$(1 / \cos^2 \alpha) * \cos^2 \alpha = 1$ , ahora tenemos que en la parte izquierda de la igualdad el $\cos^2 \alpha$ está multiplicando y dividiendo con lo que podemos simplificar:

$1 = 1$ con lo que la igualdad queda demostrada (salvo en aquellos casos que hagan que el coseno sea cero y la tangente infinito, éstos serán 90º y 270º más vueltas enteras)

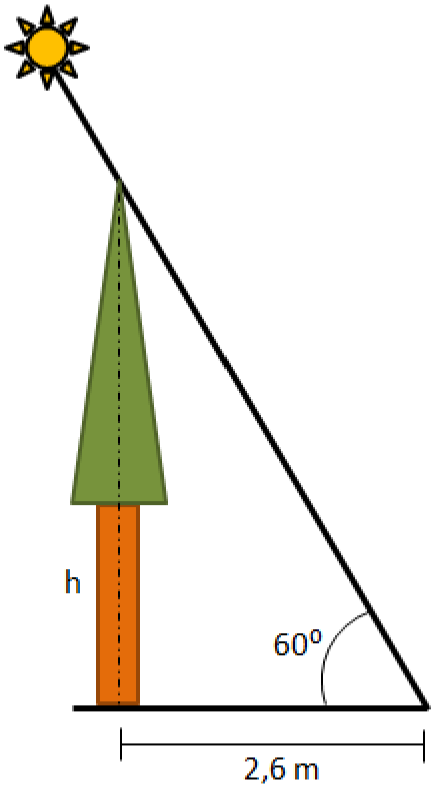
24) En el momento del día en que los rayos del sol forman un ángulo de 60º con la horizontal, la sombra que proyecta un árbol en el suelo es de 2,6 metros.

¿Cuánto mide el árbol?

Resolución:

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

Lo primero y muy útil es hacer un esquema del problema para hacernos una ide ay situarnos




Una vez aquí vemos que se nos ha formado un triángulo rectángulo donde conocemos un ángulo y uno de los catetos.

Si aplicamos la definición de la tangente de 60º para este triángulo tenemos que:

tg 60º = h / 2,6   si calculamos la tg 60º tenemos que:

1,73205080757 = h / 2,6   que despejando h obtendremos la altura del árbol;

h = 4,50333209968 metros

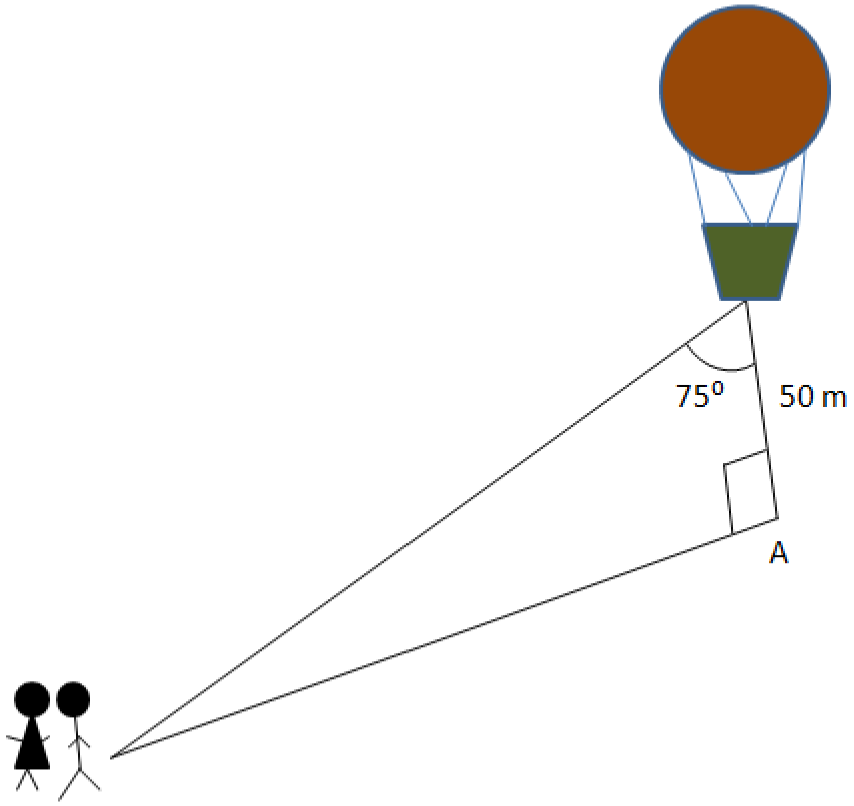
25) Juan ha subido en un globo aerostático hasta una altura de 50 metros. Sus padres siguen el vuelo desde el suelo.

a) ¿A qué distancia del punto A se encuentran los padres de Juan?
b) Si el globo continúa subiendo en la misma dirección y se detiene cuando el ángulo de observación de Juan es de 60º, ¿a cuántos metros de altura se encuentra el globo en este momento?

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

Resolución:

Lo primero y muy útil es hacer un esquema del problema para hacernos una ide ay situarnos




Una vez aquí vemos que se nos ha formado un triángulo rectángulo donde conocemos un ángulo y uno de los catetos.

a) Si aplicamos la definición de la tangente de 75º para este triángulo tenemos que:

Si llamamos D a la distancia de los padres de Juan al punto A

tg 75º = D / 50 si calculamos la tg 75º tenemos que:

3,73205080757 = D / 50 que despejando D obtendremos la distancia;

D = 186,6025 metros

b) Si ahora el ángulo cambia al ascender el globo y pasa a ser 60º, lo que no cmaiba es la distancia de los padres de Juan al punto A, con lo que aplicando la fórmula anterior llamando h a la altura del globo tenemos,
tg 60º = 186,6025 / h si calculamos la tg 60º tenemos que:

1,73205080757 = 186,6025 / h que despejando h obtendremos la altura;

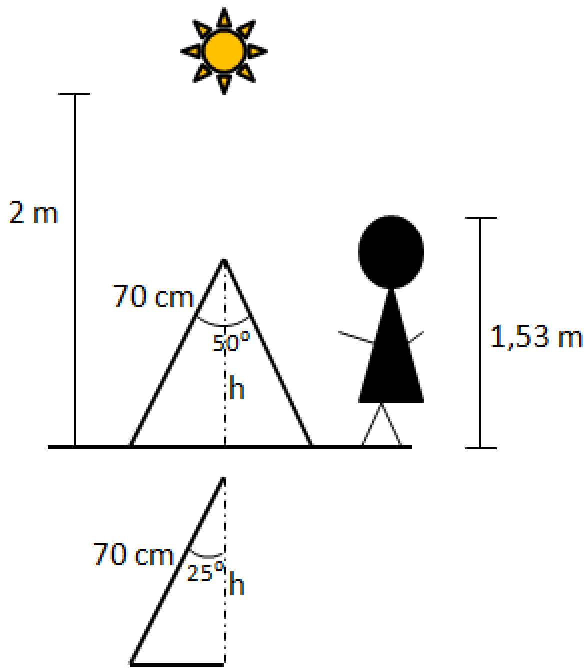
h = 107,735 metros

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

26) Alba va a poner una bombilla de bajo consumo en una lámpara que está situada a 2 metros del suelo.
Alba mide 1,53 metros, y cada lado de la escalera (de tijera abierta en un ángulo de 50º), 70 centímetros. Averigua si alcanza con ella para poner la bombilla

Resolución:

Lo primero y muy útil es hacer un esquema del problema para hacernos una idea y situarnos




Si nos fijamos la escalera forma un triángulo isósceles con el suelo. Si la altura h de ese triángulo más lo que mide Alba igualan o superan los dos metros podrá cambiar la bombilla.

En caso contrario no. Así pues la pregunta es si la altura de ese triángulo es de 47 centímetros o más.

Para el triángulo que hemos extraído de la escalera, tenemos ángulo de 25º, y una hipotenusa de 0,7 metros (recuerda todo en las mismas unidades)

Así pues $\cos 25º = h / 0{,}7 \Rightarrow 0{,}90630778 = h / 0{,}7 \Rightarrow h = 0{,}6344$ m

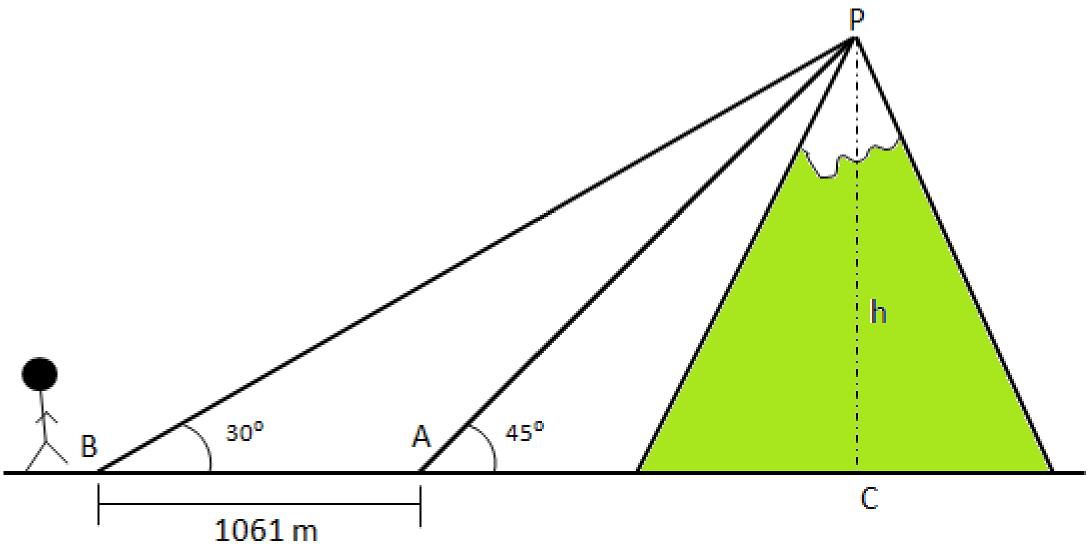
Con lo que $1{,}53 + 0{,}6344 > 2$, ASI PUES ALBA PODRÁ CAMBIAR LA BOMBILLA

27) Desde un lugar situado junto al pie de una montaña se observa el pico más alto de la misma con un ángulo de elevación de 45º. Si se retrocede 1061 metros, el ángulo es de 30º.
Calcula la altura de la montaña

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

Resolución:

Lo primero y muy útil es hacer un esquema del problema para hacernos una idea y situarnos




Para la figura anterior vemos que se nos han formado dos triángulos rectángulos el APC y el BPC, de los no conocemos ningún lado pero si uno de sus ángulos.
Adicionalmente tampoco conocemos la distancia de A a C (distancia del primer punto de observación) a la que llamaremos x.
La distancia del segundo punto de observación B a la base C de la montaña entonces será
x + 1061
Con estos datos podemos plantear lo siguiente:

$$\begin{array}{lll} tg\ 45º = h / x & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 1 = h / x \\ 0{,}5773502 = h / (x + 1061) \end{array} \right. \\ tg\ 30º = h / (x + 1061) & \Rightarrow & \end{array}$$

Que resulta ser un sistema de ecuaciones no lineal con dos ecuaciones con dos incógnitas que pasaremos a resolver.
Despejamos la x de la primera ecuación y nos queda que x = h con lo que sustituimos en la segunda

$0{,}5773502 = h / (h + 1061) \Rightarrow (h + 1061) * 0{,}5773502 = h \Rightarrow$

$0{,}5773502h + 612{,}56863561 = h \Rightarrow 612{,}56863561 = h – 0{,}5773502h \Rightarrow$

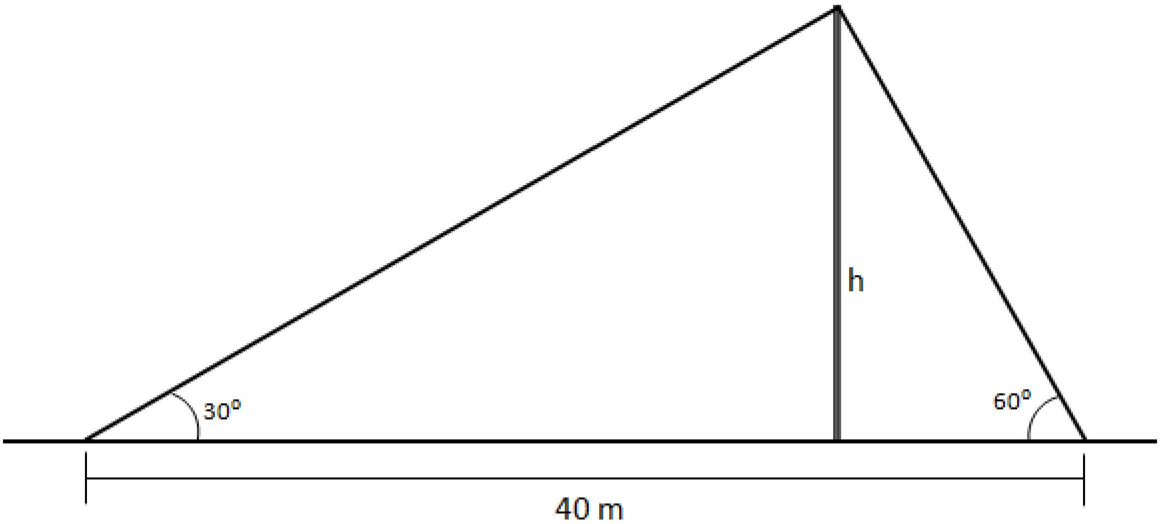
$0{,}4226498h = 612{,}56863561 >$ **h = 1449,3527 m**

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

28) Una antena se ha clavado en el suelo. Para que permanezca vertical y bien sujera se han colocado dos anclajes en el suelo a ambos lados de la antena alineados con su base.
La distancia entre los anclajes es de 40 metros y si se observa la parte más alta de la antena desde cada uno de ellos, los ángulos de elevación son de 30º y 60º, respectivamente.
Calcula la altura de la antena.

Resolución:

Lo primero y muy útil es hacer un esquema del problema para hacernos una idea y situarnos




Como podemos ver en la figura se nos han formado dos triángulo rectángulos en los que desconocemos los lados. Si llamamos x a la distancia de la base de uno de los anclajes (por ejemplo el del que forma el ángulo de 30º), la otra distancia será 40 – x.
Así ahora podemos hacer

$$\begin{array}{lcl} \text{tg } 30º = h / x & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 0{,}5773502 = h / x \\ 1{,}7320508 = h / (40 - x) \end{array} \right. \\ \text{tg } 60º = h / (40 - x) & \Rightarrow & \end{array}$$

Que como podemos ver se trata de un sistema de ecuaciones no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas que pasamos a resolver.

Podemos despejar la h de ambas ecuaciones e igualar.

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 0{,}5773502x \\ h = 1{,}7320508(40 - x) \end{array} \right.$$

Así pues,

$0{,}5773502x = 1{,}7320508(40 - x) \Rightarrow 0{,}5773502x = -1{,}7320508x + 69{,}2820323 \Rightarrow$

# 4º ESO – opción B – Ejercicios

2,309401x = 69,2820323 => x = 69,2820323 / 2,309401 => x = 30 m

Una vez aquí sustituimos por ejemplo en la primera ecuación y tenemos,

**h = 0,5773502 * 30 = 17.320506 m**